

平均非扩张映射的迭代格式

崔云安, 张佳兴

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 基于 Mann 迭代、Ishikawa 迭代以及一些其他的二步迭代三步迭代的构造方式, 构造出两种新的四步迭代格式和一种 n 步迭代, 在一致凸的 Banach 空间中的非空有界闭凸子集中研究了这两种四步迭代格式与平均非扩张映射 T 不动点之间的关系, 并得到了新定义的 n 步迭代收敛于平均非扩张映射 T 的不动点的一个充分条件。

关键词: 平均非扩张映射; 不动点性质; 迭代格式

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.01.018

中图分类号: O177 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2021)01-0130-05

Iterative Schemes of Mean Nonexpansive Mapping

CUI Yun-an, ZHANG Jia-xing

(School of Applied Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Based on Mann iteration, Ishikawa iteration and some other two-step iteration, three-step iteration methods, two new four-step iteration schemes and one n -step iteration are constructed. A nonempty bounded closed convex subset C of a uniformly convex Banach space, the relationship between the two four-step iterative schemes and the fixed point of the mean nonexpansive mapping T is studied. A sufficient condition for the n -step iteration to converge to the fixed point of the mean nonexpansive mapping T is obtained.

Keywords: the mean nonexpansive mapping; the fixed point properties; iterative scheme

0 引言

不动点理论的研究无疑是一个重要的现代数学研究方向,它是基础数学的重要组成部分,不仅仅是在数学中涉及很多,而且在其他领域也有着广泛的应用。在研究不动点理论的过程中,迭代格式起着重要的作用。1922 年,波兰数学家 BANACH 通过使用 Picard 迭代,证明了著名的 Banach 压缩映射原理^[1]。20 世纪 50 年代, MANN 提出了 Mann 迭

代^[2],受到 Mann 迭代的启发,1974 年 ISHIKAWA 引入了新的迭代过程^[3]。从某种意义上讲,它是比 Mann 迭代更具一般性的迭代,20 世纪 70 年代前后,作为压缩映射自然推广的非扩张映射被提出,后来,张石生、CHIDUME 等人对不同映射下的 Mann 迭代和 Ishikawa 迭代做了很多的工作,并得到了许多成果^[4-10]。

在对文 [1-20] 中关于平均非扩张映射的不动点问题研究方法以及迭代格式进行分析后,借助在一致凸的 Banach 空间中平均非扩张映射的不动

收稿日期: 2018-12-21

基金项目: 国家自然科学基金(11871181)。

作者简介: 张佳兴(1985—),男,硕士研究生。

通信作者: 崔云安(1961—),男,博士,教授, E-mail: cuiya@hrbust.edu.cn。

点的性质, 本文尝试构造一些新的迭代格式, 研究迭代格式与不动点之间的关系, 得到相应结论以及迭代收敛的充分条件。

1 基本定义

定义1^[1] 设 X 为 Banach 空间, $T: X \rightarrow X$ 为一映射, 如果存在常数 $k \in (0, 1)$, 对任意 $x, y \in X$, 有

$$\|Tx - Ty\| \leq k \|x - y\|$$

则称 T 为压缩映射。

定义2^[2] 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 的子集, 连续映射 $T: K \rightarrow X$ 称为平均非扩张的, 若

$$\|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b \|x - Ty\|$$

其中 $\forall x, y \in K, a, b \geq 0, a + b \leq 1$ 。

定义3^[3] 设 X 是 Banach 空间, K 是 X 的子集, 连续映射 $T: K \rightarrow X$ 称为平均非扩张的, 若

$$\|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b \{ \|x - Tx\| + \|y - Ty\| \} + c \{ \|x - Ty\| + \|y - Tx\| \}$$

其中 $\forall x, y \in K, a, b, c \geq 0, a + 2b + 2c \leq 1$ 。

定义4^[4] 由迭代 $x_n = (1 - \alpha_n)x_{n-1} + \alpha_n Tx_{n-1}$ 得到的迭代序列 $\{x_n\}$ 为 Mann 迭代, 其中 $\alpha_n \in (0, 1)$ 。

引理1^[5] 若 T 为压缩映射, 则必存在唯一一点 $x_0 \in X$, 使得 $Tx_0 = x_0$ 。

引理2^[6] 设 X 是自反的 Banach 空间, K 是 X 中的有界非空闭凸子集, 设 T 是映 K 到自身的连续映射且满足:

1) $\|Tx - Ty\| \leq a \|x - y\| + b \|x - Tx\| + c \|x - Ty\|, \forall x, y \in K$, 其中 $a, b, c \geq 0, a + b + c \leq 1$;

2) K 具正规结构: 即对 K 中每一包含不止一点的闭凸集 F , 存在一点 $x_F \in F$, 使得

$$\sup_{y \in F} \|x_F - y\| < \delta(F) \quad (\delta(F) \text{ 为 } F \text{ 的直径})$$

则 T 在 K 中存在不动点。

引理3^[7] X 是一致凸 Banach 空间的充分必要条件为对任意的序列 $\{t_n\} \subset [a, b]$ 且 $0 < a \leq b < 1$, 若序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subset X$, 使得 $\|x_n\| = 1, \|y_n\| = 1, \|(1 - t_n)x_n + t_n y_n\| \rightarrow 1$, 则 $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ 。

2 主要内容

定理1 设 X 是一致凸的 Banach 空间, K 是 X 中的有界非空闭凸子集, $T: K \rightarrow K$ 为平均非扩张映射 (定义3)。序列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$,

$\subset (0, 1), \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \frac{1}{2})$ 且 $\{\alpha_n\} \subset [c, d], 0 < c \leq d < 1$, 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &\in K \\ z_n &= (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) \\ y_n &= (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T(z_n) \\ w_n &= (1 - \varphi_n)y_n + \varphi_n T(y_n) \\ x_{n+1} &= (1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \gamma_n T(y_n) + \gamma_n T(w_n) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

则 T 在 K 上存在不动点, 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于此不动点。

证明: 根据引理2可知 $\text{Fix}(T) \neq \emptyset$ 。试证

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \text{ 存在, 取 } p \in \text{Fix}(T) \text{ 有} \\ \|z_n - p\| &= \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| \leq \\ &(1 - \alpha_n)\|x_n - p\| + \alpha_n a\|x_n - p\| + \\ &\alpha_n b\|x_n - p\| = \|x_n - p\| \end{aligned} \quad (2)$$

类似可得

$$\|w_n - p\| = \|y_n - p\| \leq \|z_n - p\| \leq \|x_n - p\| \quad (3)$$

利用式(3), 得到

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|(1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \gamma_n T(y_n) + \\ &\gamma_n T(w_n) - p\| \leq \\ &(1 - 2\gamma_n)\|T(z_n) - T(p)\| + \gamma_n\|T(y_n) - \\ &T(p)\| + \gamma_n\|T(w_n) - T(p)\| \leq \\ &(1 - 2\gamma_n)\|z_n - p\| + \gamma_n\|y_n - p\| + \\ &\gamma_n\|w_n - p\| \leq \|z_n - p\| \leq \|x_n - p\| \end{aligned} \quad (4)$$

于是得到了对于 $\forall n \geq 1$, 都有 $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ 的结论, 说明了有界数列 $\|x_n - p\|$ 是递减因此

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \text{ 存在且 } \{x_n\} \text{ 有界。然后, 拟证明} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

不失一般性, 假设 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$

因此

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a\|x_n - p\| + \\ &b\|x_n - p\|) \leq \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| &= r \end{aligned} \quad (6)$$

由式(2)得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq r \quad (7)$$

现在, 由式(4)可知

$$r = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| \leq \|z_n - p\| \quad (8)$$

由式(7)和(8)得

$$\begin{aligned} r &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| \\ \text{即} \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| &= r \end{aligned} \quad (9)$$

根据引理3和式(5)、(6)、(9),得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0 \quad (10)$$

最后,我们证明 $T(x_n) = p$ 且 p 是 T 在 K 上存在唯一不动点。

$$\begin{aligned} \|x_n - p\| &\leq \|x_n - T(x_n)\| + \|T(x_n) - p\| = \\ &\|x_n - T(x_n)\| + (a+b) \|x_n - p\| \end{aligned}$$

即

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\|x_n - T(x_n)\|}{1 - (a+b)}$$

由 $a+b < 1$ 和(10)得

$$\|x_n - p\| \rightarrow 0$$

即证 T 在 K 上存在不动点 p , 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 p 。

定理2 设 X 是一致凸的 Banach 空间, K 是 X 中的有界非空闭凸子集且具有正规结构, $T: K \rightarrow K$ 为平均非扩张映射。以下序列都属于 $(0, 1)$ 区间且

$\{\alpha_{1n}\} \subset [c, d]$, $0 < c \leq d < 1$, $\sum_{i=1}^m b_{in} = 1$ 序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

$$\begin{cases} x_1 \in K \\ y_{1n} = T((1 - \alpha_{1n})x_n + \alpha_{1n}T(x_n)) \\ y_{2n} = T((1 - \alpha_{2n})y_{1n} + \alpha_{2n}T(y_{1n})) \\ \vdots \\ y_{mn} = T((1 - \alpha_{mn})y_{(m-1)n} + \alpha_{mn}T(y_{(m-1)n})) \\ x_{n+1} = T(\sum_{i=1}^m b_{in}T(y_{in})) \end{cases}$$

则 T 在 K 上存在不动点, 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于此不动点。

证明: 根据引理2知 T 在 K 中存在不动点, 即 $Fix(T) \neq \emptyset$ 。试证明对每个 $p \in Fix(T)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 存在, 为此, 我们令 $p \in Fix(T)$ 。

通过 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, 1)$, 对 $\forall n \in N$, 有

$$\begin{aligned} \|y_{1n} - p\| &= \|T((1 - \alpha_{1n})x_n + \alpha_{1n}T(x_n)) - p\| \leq \\ &a \|(1 - \alpha_{1n})x_n + \alpha_{1n}T(x_n) - p\| + \\ &b \|(1 - \alpha_{1n})x_n + \alpha_{1n}T(x_n) - p\| \leq \\ &(1 - \alpha_{1n})\|x_n - p\| + \alpha_{1n}\|T(x_n) - p\| \leq \\ &(1 - \alpha_{1n})\|x_n - p\| + \alpha_{1n}a\|x_n - p\| + \\ &\alpha_{1n}b\|x_n - p\| = \|x_n - p\| \end{aligned}$$

对 $\forall n \in N$, 同理有

$$\|y_{2n} - p\| \leq \|y_{1n} - p\| \leq \|x_n - p\| \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|y_{mn} - p\| &\leq \|y_{(m-1)n} - p\| \leq \dots \leq \|y_{1n} - p\| \leq \\ &\|x_n - p\| \end{aligned} \quad (12)$$

从式(11)和(12), 得出

$$\|x_{n+1} - p\| = \|T(\sum_{i=1}^m b_{in}T(y_{in})) - T(p)\| \leq$$

$$a \|\sum_{i=1}^m b_{in}T(y_{in}) - p\| + b \|\sum_{i=1}^m b_{in}T(y_{in}) - p\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^m \|b_{in}T(y_{in}) - p\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^m b_{in} \|y_{in} - p\| \leq$$

$$\sum_{i=1}^m b_{in} \|x_n - p\| \leq \|x_n - p\|$$

于是, 对于 $\forall n \geq 1$, 有 $\|x_{n+1} - p\| \leq \|x_n - p\|$ 。这意味着, $\|x_n - p\|$ 是有界的和递减的。因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 存在, 从而 $\{x_n\}$ 有界。

然后, 我们证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0$ 。不失一

般性, 我们假设

$$r := \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| \quad (13)$$

因此

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T(x_n) - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (a\|x_n - p\| + \\ &b\|x_n - p\|) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \end{aligned} \quad (14)$$

由式(11)得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \leq r \quad (15)$$

现在, 可以得到

$$\begin{aligned} r &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - p\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|T((1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \\ &\gamma_n T(y_n) + \gamma_n T(w_n)) - p\| \leq \\ &a \|(1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \gamma_n T(y_n) + \gamma_n T(w_n) - p\| + \\ &b \|(1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \gamma_n T(y_n) + \gamma_n T(w_n) - p\| = \\ &(a+b) \|(1 - 2\gamma_n)T(z_n) + \gamma_n T(y_n) + \gamma_n T(w_n) - p\| \leq \\ &(1 - 2\gamma_n) \|T(z_n) - p\| + \gamma_n \|T(y_n) - p\| + \\ &\gamma_n \|T(w_n) - p\| \leq \\ &(1 - 2\gamma_n) a \|z_n - p\| + (1 - 2\gamma_n) b \|z_n - p\| + \\ &\gamma_n a \|y_n - p\| + \gamma_n b \|y_n - p\| + \gamma_n a \|w_n - p\| + \\ &\gamma_n b \|w_n - p\| < \\ &(1 - 2\gamma_n) \|z_n - p\| + \gamma_n \|y_n - p\| + \gamma_n \|w_n - p\| \leq \\ &(1 - 2\gamma_n) \|z_n - p\| + \gamma_n \|z_n - p\| + \gamma_n \|z_n - p\| \leq \\ &\|z_n - p\| \end{aligned}$$

这意味着

$$r \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| \quad (16)$$

由式(15)和(16)得

$$\begin{aligned} r &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - p\| = \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T((1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n)) - p\| \leq \\ &a \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| + \\ &b \limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| < \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| \quad (17) \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| \leq \\ &(1 - \alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|T(x_n) - p\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \limsup_{n \rightarrow \infty} [1 - \alpha_n] \|x_n - p\| + \alpha_n a \|x_n - p\| + \\ & \alpha_n b \|x_n - p\| < \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} [1 - \alpha_n] \|x_n - p\| + \alpha_n \|x_n - p\| \leq \\ & \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = r \end{aligned} \quad (18)$$

由式 (17) 和 (18), 得到

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n T(x_n) - p\| = r \quad (19)$$

根据引理 3 和式 (13)、(14)、(19), 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - T(x_n)\| = 0 \quad (20)$$

最后, 我们证明 $T(x_n) = p$ 且 p 是 T 在 K 上存在唯一不动点。

$$\begin{aligned} \|x_n - p\| & \leq \|x_n - T(x_n)\| + \|T(x_n) - p\| = \\ \|x_n - T(x_n)\| & + (a + b) \|x_n - p\| \end{aligned}$$

即

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\|x_n - T(x_n)\|}{1 - (a + b)}$$

由 $a + b < 1$ 和式 (20) 得

$$\|x_n - p\| \rightarrow 0$$

即证 T 在 K 上存在不动点 p , 且 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 p 。

定理 3 设 X 是一致凸的 Banach 空间, K 为 X 的非空有界闭凸子集. $T: K \rightarrow K$ 是具有不动点的平均非扩张映射, T 满足 $\|Tx - Ty\| \leq a\|x - y\| + b\{\|x - Tx\| + \|y - Ty\|\} + c\{\|x - Ty\| + \|y - Tx\|\}$, 其中 $\forall x, y \in K, a, b, c \geq 0, a + 2b + 2c < 1$. $\{u_n\}$ 是 T 的 Mann 迭代, $\{x_n\}$ 是 T 下新定义的迭代, 满足:

$$\begin{cases} x_1 \in C \\ z_n = (1 - \gamma_n)x_n + \gamma_n Tx_n \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n Tz_n \\ w_n = (1 - \theta_n)y_n + \theta_n Ty_n \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)Tz_n + \frac{\alpha_n}{2}Ty_n + \frac{\alpha_n}{2}Tw_n \end{cases}$$

其中 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\theta_n\}, \{\gamma_n\} \subseteq [0, 1], n = 0, 1, 2, \dots$. 若 Mann 迭代 $\{u_n\}$ 收敛于 T 的不动点 q , 则新定义的迭代收敛于 T 的不动点 q 。

证明: 由 Mann 迭代 $\{u_n\}$ 收敛于 T 的不动点 q 知 $u_{n+1} = (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tu_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - q\| = 0$ 从而

$$\begin{aligned} \|u_{n+1} - x_{n+1}\| & = \left\| (1 - \alpha_n)u_n + \alpha_n Tu_n - (1 - \alpha_n)Tz_n - \right. \\ & \left. \frac{\alpha_n}{2}Ty_n - \frac{\alpha_n}{2}Tw_n \right\| \leq \end{aligned}$$

$$(1 - \alpha_n) \|u_n - Tz_n\| + \frac{\alpha_n}{2} \|Tu_n - Ty_n\| +$$

$$\frac{\alpha_n}{2} \|Tu_n - Tw_n\| \leq$$

$$(1 - \alpha_n) (\|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tz_n\|) +$$

$$\frac{\alpha_n}{2} \|Tu_n - Ty_n\| + \frac{\alpha_n}{2} \|Tu_n - Tw_n\|$$

$$\|Tu_n - Tz_n\| \leq a \|u_n - z_n\| + b(\|u_n - Tu_n\| + \|z_n - Tz_n\|) + c(\|u_n - Tz_n\| + \|z_n - Tu_n\|) \leq$$

$$a \|u_n - z_n\| + b \|u_n - Tu_n\| + b(\|z_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tz_n\|) +$$

$$c(\|u_n - Tu_n\| + \|Tu_n - Tz_n\| + \|z_n - u_n\| + \|u_n - Tu_n\|) =$$

$$(a + b + c) \|u_n - z_n\| + 2(b + c) \|u_n - Tu_n\| +$$

$$(b + c) \|Tu_n - Tz_n\|$$

类似的有

$$\|Tu_n - Ty_n\| \leq (a + b + c) \|u_n - y_n\| +$$

$$2(b + c) \|u_n - Tu_n\| + (b + c) \|Tu_n - Ty_n\|$$

$$\|Tu_n - Tw_n\| \leq (a + b + c) \|u_n - w_n\| +$$

$$2(b + c) \|u_n - Tu_n\| + (b + c) \|Tu_n - Tw_n\|$$

$$\|Tu_n - Tx_n\| \leq (a + b + c) \|u_n - x_n\| +$$

$$2(b + c) \|u_n - Tu_n\| + (b + c) \|Tu_n - Tx_n\|$$

因为 $a + 2b + 2c \leq 1$, 所以 $a + b + c \leq 1 - b - c$, 上式整理得

$$\|Tu_n - Tz_n\| \leq M \|u_n - z_n\| + N \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|Tu_n - Ty_n\| \leq M \|u_n - y_n\| + N \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|Tu_n - Tw_n\| \leq M \|u_n - w_n\| + N \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|Tu_n - Tx_n\| \leq M \|u_n - x_n\| + N \|u_n - Tu_n\|$$

$$\text{其中 } 0 \leq M = \frac{a + b + c}{1 - b - c} < 1, 0 \leq N = \frac{2(b + c)}{1 - b - c}.$$

又因为

$$\|u_n - w_n\| = \|u_n - (1 - \theta_n)y_n - \theta_n Ty_n\| \leq$$

$$(1 - \theta_n) \|u_n - y_n\| + \theta_n \|u_n - Ty_n\| \leq$$

$$(1 - \theta_n) \|u_n - y_n\| + \theta_n \|u_n - Tu_n\| +$$

$$\theta_n \|Tu_n - Ty_n\| \leq$$

$$(1 - \theta_n) \|u_n - y_n\| + \theta_n \|u_n - Tu_n\| +$$

$$\theta_n M \|u_n - y_n\| + \theta_n N \|u_n - Tu_n\| \leq$$

$$(1 - \theta_n) \|u_n - y_n\| + M \theta_n \|u_n - y_n\| +$$

$$(1 + N) \theta_n \|u_n - Tu_n\| =$$

$$\|u_n - y_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|u_n - y_n\| = \|u_n - (1 - \beta_n)z_n - \beta_n Tz_n\| \leq$$

$$\|u_n - z_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|u_n - z_n\| = \|u_n - (1 - \gamma_n)x_n - \gamma_n Tx_n\| \leq$$

$$\|u_n - x_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\|$$

即

$$\|u_n - z_n\| \leq \|u_n - x_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|u_n - y_n\| \leq \|u_n - z_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\| \leq$$

$$\|u_n - x_n\| + 2(1 + N) \|u_n - Tu_n\|$$

$$\|u_n - w_n\| \leq \|u_n - y_n\| + (1 + N) \|u_n - Tu_n\| \leq$$

$$\|u_n - x_n\| + 3(1+N)\|u_n - Tu_n\|$$

因此

$$\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \leq (1 - \alpha_n)(\|u_n - Tu_n\| +$$

$$\|Tu_n - Tz_n\|) + \frac{\alpha_n}{2}\|Tu_n - Ty_n\| +$$

$$\frac{\alpha_n}{2}\|Tu_n - Tw_n\| \leq$$

$$(1 - \alpha_n)(\|u_n - Tu_n\| + M\|u_n - z_n\| +$$

$$N\|u_n - Tu_n\|) + \frac{\alpha_n}{2}(M\|u_n - y_n\| +$$

$$N\|u_n - Tu_n\|) + \frac{\alpha_n}{2}(M\|u_n - w_n\| +$$

$$N\|u_n - Tu_n\|) \leq$$

$$(1 - \alpha_n)((1 + N)\|u_n - Tu_n\| + M(\|u_n - x_n\| +$$

$$(1 + N)\|u_n - Tu_n\|)) +$$

$$\frac{\alpha_n}{2}(M(\|u_n - x_n\| + 2(1 + N)\|u_n - Tu_n\|) +$$

$$N\|u_n - Tu_n\|) +$$

$$\frac{\alpha_n}{2}(M(\|u_n - x_n\| + 3(1 + N)\|u_n - Tu_n\|) +$$

$$N\|u_n - Tu_n\|)$$

化简后简记为 $\|u_{n+1} - x_{n+1}\| \leq M\|u_n - x_n\| +$

由于 $\|q - Tu_n\| = \|Tu_n - Tq\| \leq$

$$a\|u_n - q\| + b(\|u_n - Tu_n\| + \|q - Tq\|) +$$

$$c(\|u_n - Tq\| + \|q - Tu_n\|) \leq$$

$$a\|u_n - q\| + b(\|u_n - q\| + \|q - Tu_n\|) +$$

$$c(\|u_n - q\| + \|q - Tq\| + \|q - Tu_n\|) =$$

$$(a + b + c)\|u_n - q\| + (b + c)\|q - Tu_n\|$$

整理得

$$\|q - Tu_n\| \leq M\|u_n - q\| \leq \|u_n - q\|$$

$$\|u_n - Tu_n\| \leq \|u_n - q\| + \|q - Tu_n\|$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - q\| = 0$ 可知 $\|u_n - Tu_n\| \rightarrow 0$, 由 $M < 1$ 得

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x_n\| = 0$ 。又因为 $\|x_n - q\| \leq \|x_n - u_n\|$

+ $\|u_n - q\|$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - q\| = 0$ 。即证新定义

的迭代收敛于 T 的不动点 q 。

参考文献:

- [1] BANACH S. Sur Les Operations Dans Les Ensembles Abstraits Et Leur Application Aux Equations Integrals [J]. Fundamenta Mathematicae, 1922, 3(1): 51.
- [2] MANN W R. Mean Value Methods in Iteration [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1953, 4(3): 506.
- [3] ISHIKAWA S. Fixed Points by a New Iteration Method [J]. Pro-

ceedings of the American Mathematical Society, 1974, 44(1): 147.

- [4] GARCIA V P, PIASECKI L. On Mean Nonexpansive Mappings and the Lifshitz Constant [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications, 2012, 396(2): 448.

- [5] 张石生, 黄发伦. 关于 Banach 空间中平均非扩张映象的不动点理论 [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1975(2): 73.

- [6] 王晶辰. 平均非扩张映射的不动点性质 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2018.

- [7] 张石生. 不动点理论及应用 [M]. 重庆: 重庆出版社, 1984.

- [8] 陈汝栋. 不动点理论及应用 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.

- [9] 姚永红, 陈汝栋, 周海云. 非扩张映象不动点的迭代算法 [J]. 数学学报, 2007, 50(1): 139.

YAO Yonghong, CHEN Rudong, ZHOU Haiyun. Iterative Algorithms to Fixed Point of Nonexpansive Mapping [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2007, 50(1): 139.

- [10] ABBAS M, NAZIR T. Fixed Point of Generalized Weakly Contractive Mappings in Ordered Partial Metric Spaces [J]. Fixed Point Theory and Applications, 2012, 2012(1): 1.

- [11] KOVACS L G, WALL G E. Involutory automorphisms of Groups of Odd Order and Their Fixed Point Groups [J]. Nagoya Mathematical Journal, 2016, 27(1): 55.

- [12] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2011.

- [13] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论 [M]. 上海: 华东师范大学出版社, 1986.

- [14] ALBIAC F, KALTON N J. Nonlinear Geometry of Banach Spaces [M]. Springer International Publishing, 2016, 21(1): 7.

- [15] ARGYROS S A, MANOUSSAKIS A. An Indecomposable and Unconditionally Saturated Banach Space [J]. Studia Mathematica, 2016, 159(1): 1.

- [16] ARGYROS S A, GODEFROY G, ROSENTHAL H P. Descriptive Set Theory and Banach Spaces [J]. Handbook of the Geometry of Banach Spaces, 2015(6): 1007.

- [17] MANDREKAR V, RUDIGER B. Stochastic Integration in Banach Spaces [J]. Advances in Mathematics, 2015, 81(1): 99.

- [18] 崔云安, 周晶. CAT(0) 空间中平均非扩张映射不动点的存在性定理及其半闭原理 [J]. 哈尔滨师范大学自然科学学报, 2012, 28(4): 10.

CUI Yunan, ZHOU Jing. Existence of Fixed Points and Their Demiclosed Principle for Mean Nonexpansive Mappings in CAT(0) Spaces [J]. Natural Science Journal of Harbin Normal University, 2012, 28(4): 10.

- [19] J ZHOU, Y A CUI. Fixed Point Theorems for Mean Nonexpansive Mappings in CAT(0) Spaces [J]. Numerical Functional Analysis & Optimization, 2015, 36(9): 1224.

- [20] Z GU, Y LI. Approximation Methods for Common Fixed Points of Mean Nonexpansive Mapping in Banach Spaces [J]. Fixed Point Theory & Applications, 2008, 2008(1): 471.

(编辑: 王 萍)